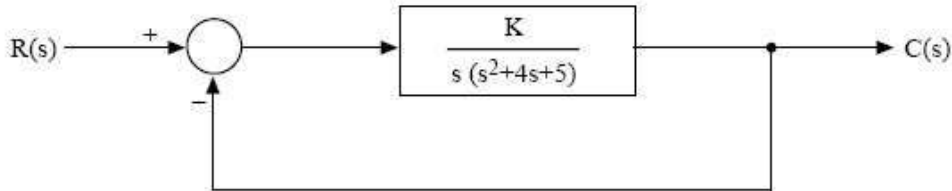


תרגילים במג"ש – Root Locus

תרגיל 1 – חיצוני 2003

באיור לשאלה 2 מתוארת מערכת בקרה עם משוב יחידה.



איור לשאלה 2

- א. סרטט את המקום הגיאומטרי של שורשי המערכת הנתונה.
 ב. קבע עבור אילו ערכי K תהיה המערכת הנתונה יציבה.
 ג. כדי לשפר את יציבות המערכת, משנים את פונקציית התמסורת בחוג פתוח, והיא תהיה

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^2 + 4s + 5)}$$

עתה:

סרטט את המ.ג.ש. של המערכת לאחר השינוי, והסבר מדוע השינוי שיפר את יציבות המערכת.

פתרון 1

א.

$$GH = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 5)} = \frac{K}{s(s + 2 + j)(s + 2 - j)}$$

$$\beta = \frac{(2h+1)180}{n-l} = \frac{(2h+1)180}{3} = 60, 180, 300$$

זווית אסימפטוטה:

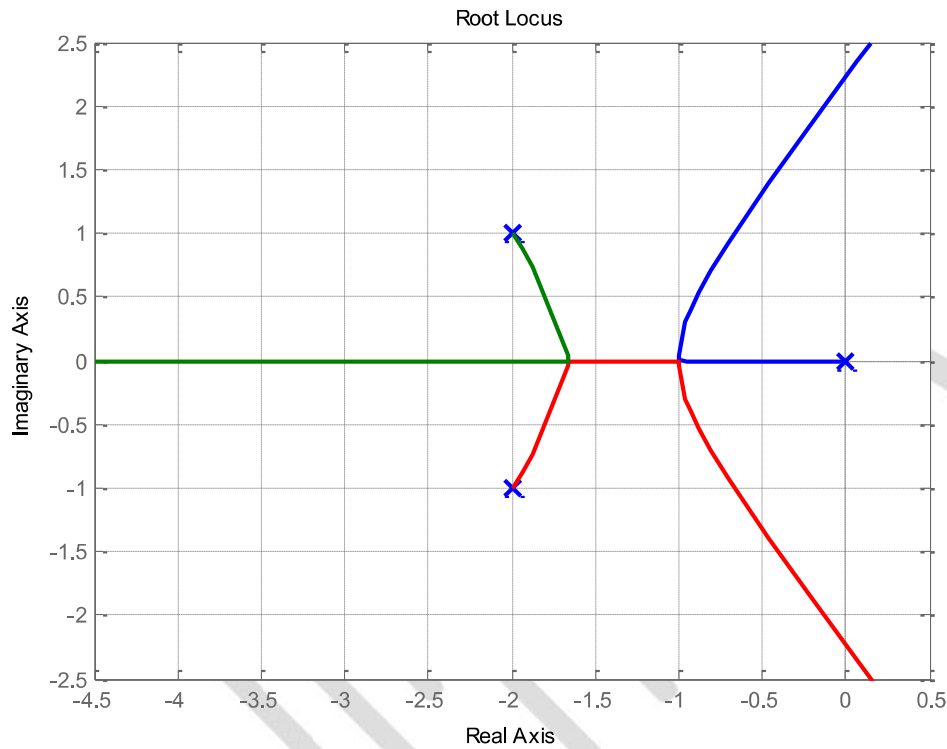
נקודת יציאת אסימפטוטות:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{Re}(P_i) - \sum \text{Re}(Z_i)}{n-l} = \frac{(-2) + (-2) + 0}{3} = -1.33$$

זווית יציאה של קוטב מרוכב ($s=-2+j$):

$$GH' = \frac{K}{s(s+2+j)} = \frac{K}{(-2+j)(-2+j+2+j)} = \frac{K}{(-2+j)2j}$$

$$\phi = \arg(GH') + 180 = -243 + 180 = -65^\circ$$



נקודות בריחה וחדירה:

$$\frac{1}{\sigma_b + 2 + j} + \frac{1}{\sigma_b + 2 - j} + \frac{1}{\sigma_b} = 0$$

$$\frac{2\sigma_b + 4}{\sigma_b^2 + 4\sigma_b + 5} + \frac{1}{\sigma_b} = 0$$

$$\frac{2\sigma_b^2 + 4\sigma_b + \sigma_b^2 + 4\sigma_b + 5}{(\sigma_b^2 + 4\sigma_b + 5)\sigma_b} = 0$$

$$3\sigma_b^2 + 8\sigma_b + 5 = 0 \Rightarrow \sigma_b = -1, -1.66$$

ב. ראוט

$$P_{(s)} = s^3 + 4s^2 + 5s + k$$

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{r} 1 \quad 5 \quad 0 \\ 4 \quad k \quad 0 \\ \frac{20-k}{4} \\ k \end{array}$$

$$\frac{20-k}{4} > 0 \Rightarrow k < 20$$

$$k > 0$$

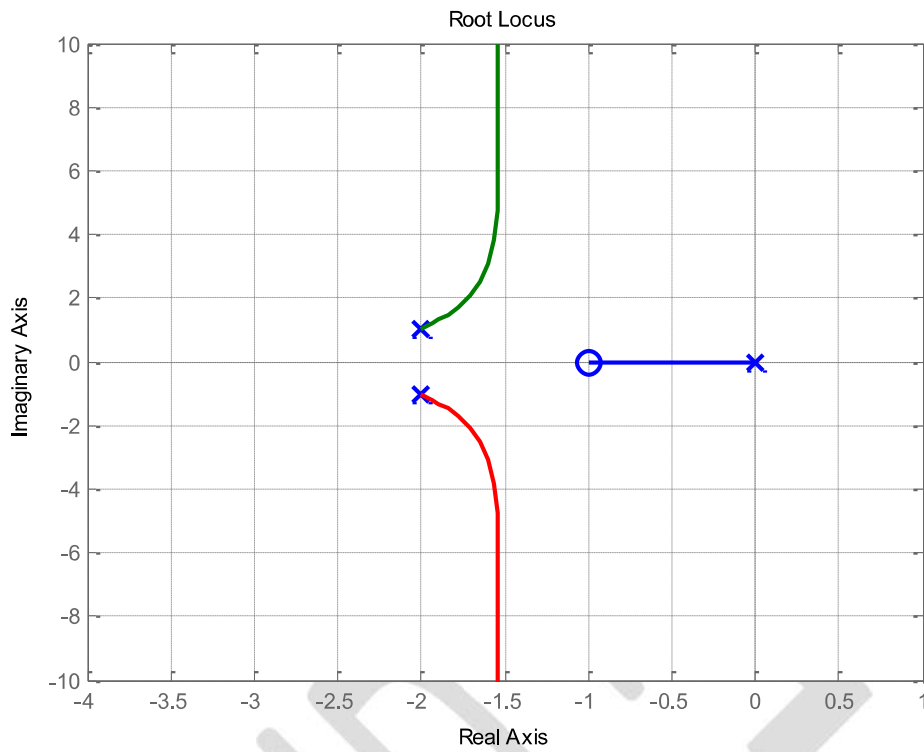
מערכת יציבה עבור: $0 < k < 20$

נקודת חיתוך עם הציר המדומה:

נציב את הערך של $k=20$ בה יש חיתוך עם הציר המדומה

$$4s^2 + k = 0$$

$$4s^2 + 20 = 0 \Rightarrow s = \pm \sqrt{-\frac{20}{4}} = \pm j2.236$$



$$\beta = \frac{(2h+1)180}{n-l} = \frac{(2h+1)180}{3-1} = 90,270^\circ \quad \text{זווית אסימפטוטה:}$$

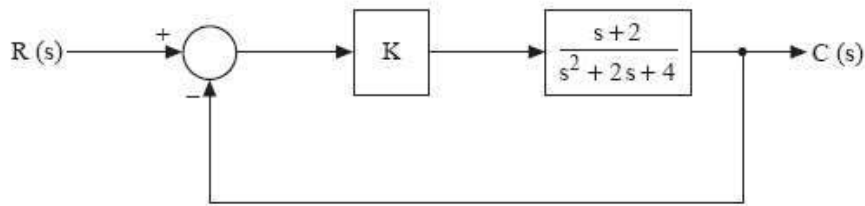
נקודת יציאת אסימפטוטות:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \operatorname{Re}(P_i) - \sum \operatorname{Re}(Z_i)}{n-l} = \frac{(-2) + (-2) - (-1)}{2} = -1.5$$

מהגרף רואים כי המערכת יציבה עבור כל k חיובי

תרגיל 2 – חיצוני 2004

באיור לשאלה 1 מתוארת מערכת בקרה עם משוב יחידה.



איור לשאלה 1

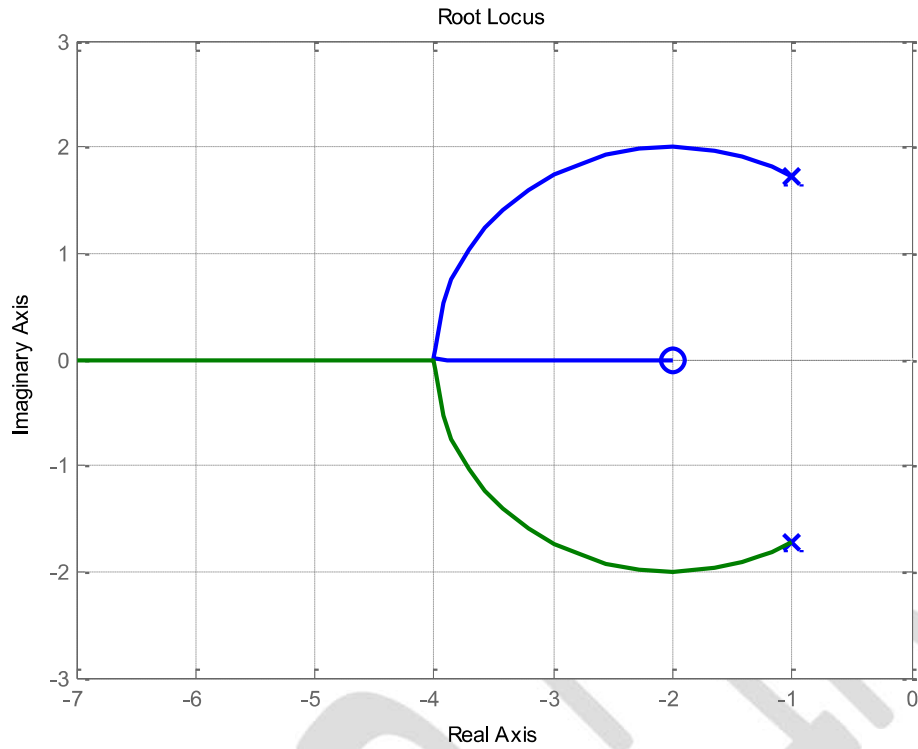
- א.**
1. מהו מספר הענפים של המ.ג.ש. (המקום הגיאומטרי של השורשים) של המערכת הנתונה?
 2. מהי האסימפטוטה של המ.ג.ש.?
 3. מצא את נקודות ההתחלה ואת נקודות הסיום של המ.ג.ש.
 4. חשב את זוויות ההתחלה ואת זוויות הסיום של המ.ג.ש.
- ב.** סרטט את המקום הגיאומטרי של שורשי המערכת הנתונה.
- ג.** קבע עבור אילו ערכי K תהיה המערכת הנתונה יציבה.

פתרון 2

- א.**
1. מספר הענפים = מספר הקטבים = 2
 2. יש אסימפטוטה אחת והיא בזווית 180 מעלות.
 3. נקודות ההתחלה של הקטבים הן: $(-1, j1.117)$, $(-1, -j1.17)$ ונקודות סיום: אחד לאפס (-
- 2)
- ואחד לאינסוף.
4. זווית יציאה של הקוטב $s = -1 + j1.17$

$$GH' = \frac{K(s+2)}{s+1+j1.173} = \frac{K(-1+j1.173+2)}{-1+1.173+1+j1.173} = \frac{K(1+j1.17)}{j2.346}$$

$$\phi_m = 180 + \arg(GH') = 180 + (-40.5) = 139.5^\circ$$



נקודת פגישה:

$$\frac{1}{\sigma_b + 1 + j1.173} + \frac{1}{\sigma_b + 1 - j1.173} = \frac{1}{\sigma_b + 2}$$

$$\frac{2\sigma_b + 2}{\sigma_b^2 + 2\sigma_b + 4} = \frac{1}{\sigma_b + 2}$$

$$\frac{2\sigma_b^2 + 2\sigma_b + 4\sigma_b + 4 - \sigma_b^2 - 2\sigma_b - 4}{(\sigma_b^2 + 2\sigma_b + 4)(\sigma_b + 2)} = 0$$

$$\sigma_b^2 + 4\sigma_b = 0 \Rightarrow \sigma_b = -4$$

ג. ראוט:

$$P_{(s)} = s^2 + 2s + 4 + ks + 2k = s^2 + s(2+k) + (4+2k)$$

$$s^2 \quad 1 \quad 4+2k$$

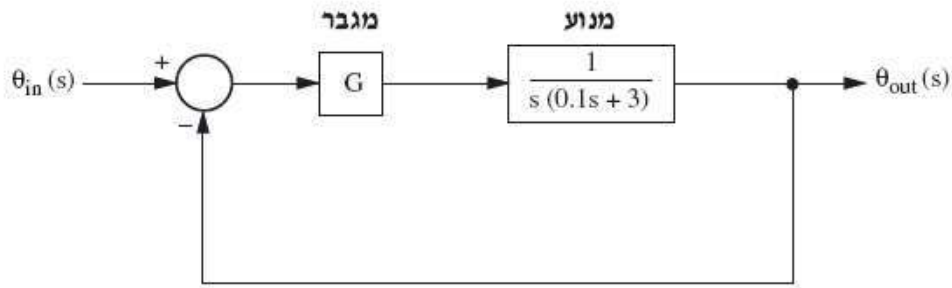
$$s^1 \quad 2+k \quad 0$$

$$s^0 \quad 4+2k$$

מערכת יציבה עבור: $k > -2 \Rightarrow 4+2k > 0 \& 2+k > 0$

תרגיל 3 – חיצוני 2006

באיור לשאלה 2 נתון תרשים מלבנים של מערכת לבקרת זווית הסיבוב של מנוע.



איור לשאלה 2

- א. סרטט במחברתך את המקום הגאומטרי של שורשי המערכת הנתונה.
 ב. האם יציבותה של המערכת תלויה בהגבר G ? נמק את תשובתך.
 ג. מה צריך להיות ערכו של G , כך שתתקבל מערכת בקרה בעלת מקדם ריסון $\xi = 0.5$?
 ד. 1. מצא את ערכו של G , שעבורו תתקבל מערכת בעלת תדירות זוויתית טבעית בלתי מרוסנת $\omega_n = 15 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.
 2. מה ערכו של מקדם הריסון שיתקבל במקרה זה?

פתרון 3

א.

$$GH(s) = \frac{k}{s(0.1s + 3)} = \frac{10k}{s(s + 30)}$$

1. מספר הענפים = מספר הקטבים = 2

2. יש 2 אסימפטוטות לאינסוף בזווית 90 ו-270 מעלות.

$$\beta = \frac{(2h + 1)180}{n - l} = 90^\circ, 270^\circ$$

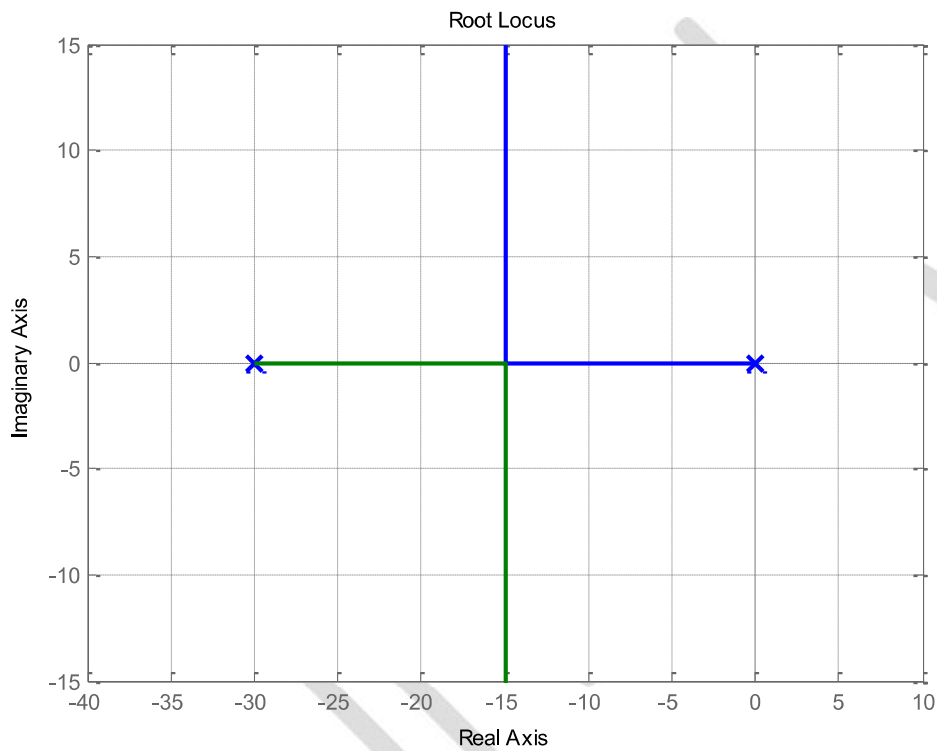
$$\sigma_0 = \frac{-30 + 0}{2} = -15$$

נקודת פגישה:

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b + 30} = 0$$

$$\frac{2\sigma_b + 30}{(\sigma_b + 30)\sigma_b} = 0$$

$$2\sigma_b + 30 = 0 \Rightarrow \sigma_b = -15$$



- ב. עבור $G > 0$ הקטבים מצד שמאל לציר γ לכן המערכת יציבה.
 עבור $G < 0$ הקוטב 0 נע ימינה לציר γ ולכן המערכת אינה יציבה.
 ג.

$$\frac{C}{R} = \frac{\frac{10k}{s(s+30)}}{1 + \frac{10k}{s(s+30)}} = \frac{10k}{s(s+30) + 10k} = \frac{10k}{s^2 + 30s + 10k}$$

$$s^2 + 30s + 10k = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$10k = \omega_n^2$$

$$2\xi\omega_n = 30$$

$$\xi = 0.5 \Rightarrow \omega_n = 30 \Rightarrow k = 90$$

.ד

$$s^2 + 30s + 10k = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$10k = \omega_n^2 = 15^2 = 225 \Rightarrow k = 22.5$$

$$2\xi\omega_n = 30$$

$$\xi = \frac{30}{2 \cdot 2.25} = 0.67$$

תרגיל 4

פונקציית התמסורת בחוג פתוח של מערכת בקרה הפועלת בחוג סגור הינה:

$$GH_{(s)} = \frac{k(s+10)}{(s+1)(s+4)}$$

שרטט את המקום ההנדסי של השורשים (R.L)

פתרון 4

א. מספר הענפים = מספר הקטבים = 2

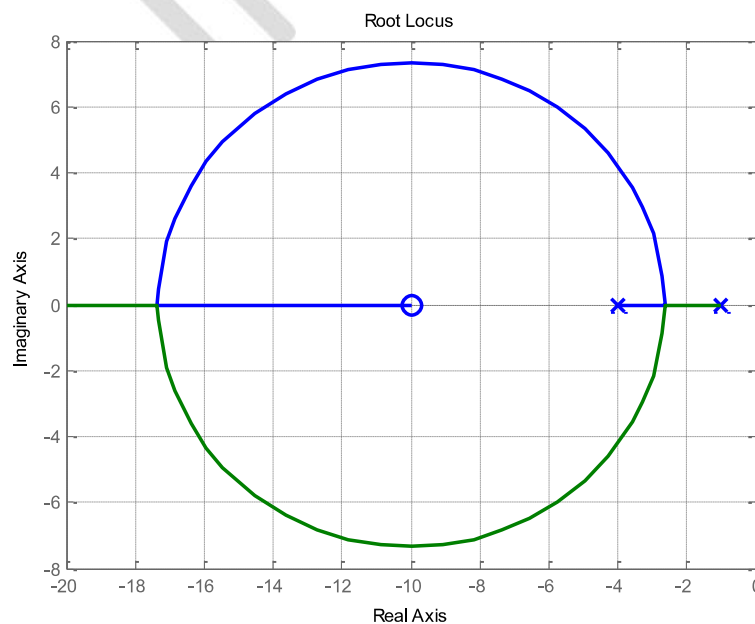
ב. יש אסימפטוטה אחת והיא בזווית 180 מעלות.

ג. נקודות ההתחלה של הקטבים הן: (-1), (-4) ונקודות סיום: אחד לאפס (-10) ואחד לאינסוף.

ד. נקודת פגישה:

$$\frac{1}{\sigma_b + 1} + \frac{1}{\sigma_b + 4} = \frac{1}{\sigma_b + 10}$$

$$\frac{(\sigma_b + 4)(\sigma_b + 10) + (\sigma_b + 1)(\sigma_b + 10) - (\sigma_b + 1)(\sigma_b + 4)}{(\sigma_b + 1)(\sigma_b + 4)(\sigma_b + 10)} \Rightarrow \sigma_b = (-2.65), (-17.35)$$



תרגיל 5

שרטט RL של הפונקציות הבאות:

$$GH_{(s)} = \frac{K(s+10)}{(s+2)(s+6)} \quad .א.$$

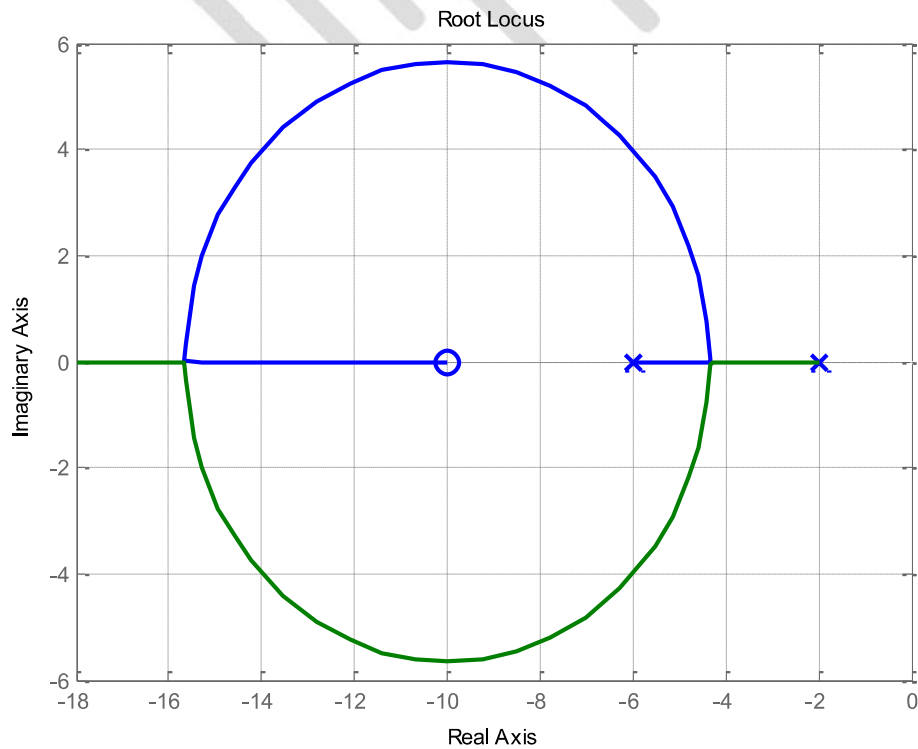
$$GH_{(s)} = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+4)(s^2+4s+8)} \quad .ב.$$

$$GH_{(s)} = \frac{K(s+4)}{(s^2+2s+10)(s+10)} \quad .ג.$$

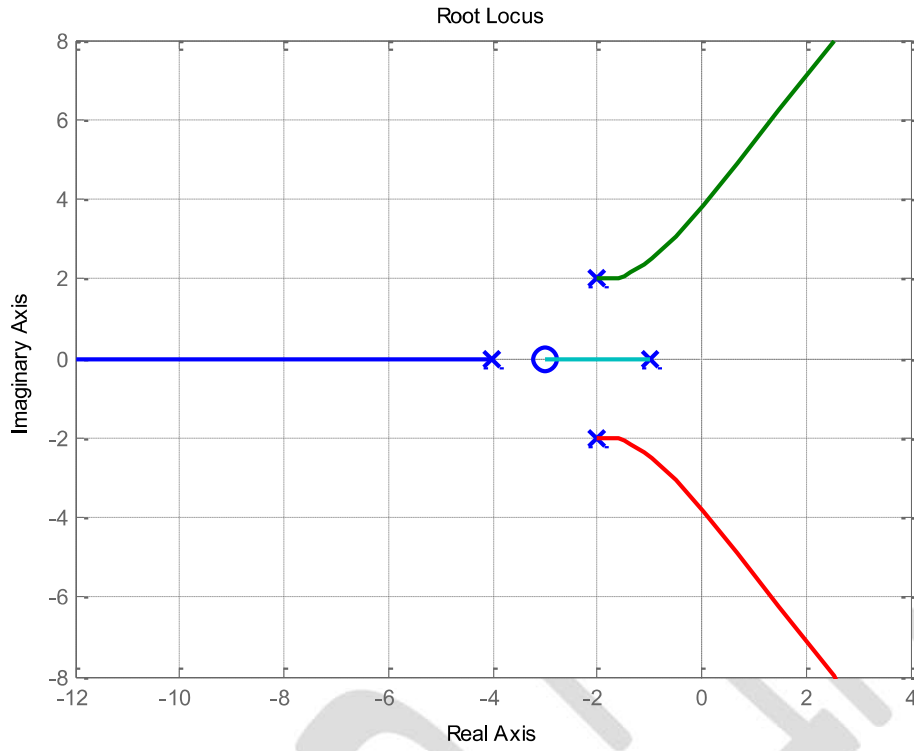
$$GH_{(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)} \quad .ד.$$

תשובה 5

.א.



ב.



ג.

