

פתרון של משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון ושני בעזרת התמרות לפלס

התמרה של נגזרת מדפי נוסחאות

$$\mathcal{L}[D^n f(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} Df(0) - \dots - D^{n-1} f(0)$$

התמרה של נגזרת ראשונה ושנייה היא:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

תרגיל דוגמא – מערכת מסדר ראשון

מצא $y(t)$

$$y'(t) + 2y(t) = 3$$

$$y(0) = 1$$

פתרון

$$s \cdot Y(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{3}{s}$$

$$s \cdot Y(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{3}{s}$$

$$Y(s)(s+2) = \frac{3}{s} + 1$$

$$Y(s) = \frac{3+s}{s(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{3+s}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

$$3+s = A(s+2) + Bs$$

$$s=0 \Rightarrow 3 = A(2) \Rightarrow A = 1.5$$

$$s=-2 \Rightarrow 1 = B(-2) \Rightarrow B = -0.5$$

$$y(t) = 1.5 - 0.5e^{-2t}$$

תרגיל דוגמא – מערכת מסדר שני

מצא $y(t)$

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = -2\delta(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

פתרון

$$s^2 \cdot Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(s \cdot Y(s) - y(0)) + 5Y(s) = -2$$

$$s^2 \cdot Y(s) - s - 1 + 2(s \cdot Y(s) - 1) + 5Y(s) = -2$$

$$s^2 \cdot Y(s) + 2s \cdot Y(s) + 5Y(s) = s + 1$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$y(t) = e^{-t} \cos(2t)$$