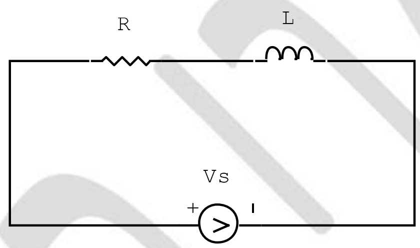
ייצוג מערכות באמצעות משוואות דיפרנציאליות ומשוואות לפלס

מעגלים חשמליים

רכיב	מישור הזמן	מישור לפלס
נגד R - חוק אום	$u_{(t)} = i_{(t)} \cdot R$	$U_{(s)} = I_{(s)} \cdot R$
סליל L – חוק לנץ	$u_{(t)} = L \cdot \frac{di_{(t)}}{dt}$	$U_{(s)} = I_{(s)} \cdot (sL)$
קבל – חוק פרדיי	$u_{(t)} = \frac{1}{C} \cdot \int i_{(t)} dt$	$U_{(s)} = I_{(s)} \cdot \left(\frac{1}{sC}\right)$

דוגמא למעגלים חשמליים מסדר ראשון

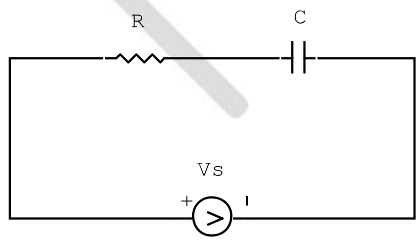
מעגל RL טורי



משוואה דיפרנציאלית - $V_{s(t)} = R \cdot i_{(t)} + L\frac{di_{(t)}}{dt}$

למשוואה מסדר ראשון יש תנאי התחלה אחד והוא $i_{(0)}$, במעגל הנתון הזרם ההתחלתי נקבע ע"י הסליל ולכן $i_{(0)} = i_{L(0)}$.

מעגל RC טורי



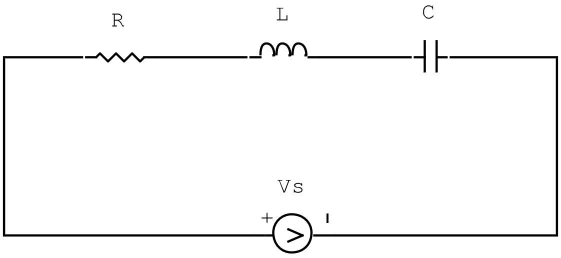
משוואה דיפרנציאלית - $V_{s(t)} = R \cdot i_{(t)} + \frac{1}{C}\int i_{(t)} dt$

נגזור את המשוואה ונקבל - $\frac{d(V_{s(t)})}{dt} = R \cdot \frac{di_{(t)}}{dt} + \frac{1}{C} i_{(t)}$

תנאי התחלה של הזרם במעגל נקבע לפי - $i_{(0)} = \frac{V_s - V_{C(0)}}{R}$

דוגמא למעגל חשמלי מסדר שני

מעגל RLC טורי



משוואה דיפרנציאלית - $V_{s(t)} = R \cdot i_{(t)} + L\frac{di_{(t)}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{(t)}dt$

נגזור את המשוואה ונקבל - $\frac{d(V_{s(t)})}{dt} = L\frac{d^2 i_{(t)}}{dt^2} + R \cdot \frac{di_{(t)}}{dt} + \frac{1}{C} i_{(t)}$

למעגל שני תנאי התחלה $i_{(0)}$ ו- $i'_{(0)}$

במעגל הנתון הזרם ההתחלתי נקבע ע"י הסליל ולכן $i_{(0)} = i_{L(0)}$.

והתנאי השני נקבע מהמשוואה בזמן 0 :

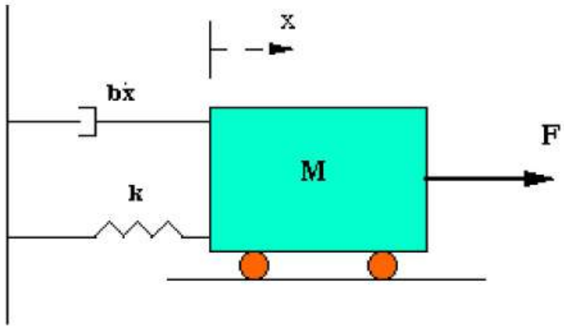
$$V_{s(0)} = R \cdot i_{(0)} + L\frac{di_{(0)}}{dt} + V_{C(0)} \Rightarrow\Rightarrow \frac{di_{(0)}}{dt} = \frac{V_{s(0)} - V_{C(0)} - R \cdot i_{(0)}}{L}$$

מערכות מכאניות

רכיבים מכאניים

רכיב	מישור הזמן	אנלוגיה לחשמל	
מסה m (kg)	$F_{(t)} = m \cdot a_{(t)}$	$M \equiv C$	a -תאוצה
קפיץ K (n/m)	$F_{(t)} = K \cdot x_{(t)}$	$K \equiv \frac{1}{L}$	x - העתק
בולם B (n/m/s)	$F_{(t)} = B \cdot v_{(t)}$	$B \equiv \frac{1}{R}$	v - מהירות

מערכת הכוללת מסה, קפיץ ובולם



לפי חוק השני של ניוטון

$$\sum F_{(t)} = m \cdot a_{(t)}$$

$$F_{(t)} - F_B - F_K = m \cdot a_{(t)}$$

$$F_{(t)} - B \cdot v_{(t)} - K \cdot x_{(t)} = m \cdot a_{(t)}$$

הקשר בין התאוצה להעתק הוא : $a_{(t)} = x''_{(t)}$

ובין המהירות להעתק : $v_{(t)} = x'_{(t)}$

אחרי הצבה נקבל משואה דיפרנציאלית מסדר שני

$$F_{(t)} = m \cdot a_{(t)} + B \cdot v_{(t)} + K \cdot x_{(t)}$$

$$F_{(t)} = m \cdot x''_{(t)} + B \cdot x'_{(t)} + K \cdot x_{(t)}$$

תנאי התחלה $x_{(0)}$ - העתק בזמן אפס ו- $v_{(0)} = x'_{(0)}$ מהירות התחלתית

כדי לפתור את המשואה הדיפרנציאלית באמצעות התמרות לפלס, נמיר את הנגזרת הראשונה והשנייה לפי:

$$L\left[f'_{(t)}\right] = s \cdot F_{(s)} - f_{(0)}$$

$$L\left[f''_{(t)}\right] = s^2 \cdot F_{(s)} - s \cdot f_{(0)} - f'_{(0)}$$

דוגמא

מצא את פונקצית התמסורת X/F במישור לפלס (תנאי התחלה= 0)

$$F_{(t)} = m \cdot x''_{(t)} + B \cdot x'_{(t)} + K \cdot x_{(t)}$$

$$F_{(s)} = m \cdot s^2 X_{(s)} + B \cdot sX_{(s)} + K \cdot X_{(s)}$$

$$\frac{X_{(s)}}{F_{(s)}} = \frac{1}{m \cdot s^2 + B \cdot s + K} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{B}{m} \cdot s + \frac{K}{m}}$$