מקום גאומטרי של השורשים (מ.ג.ש) – Root Locus

עקומת השורשים מתארת את השתנות מיקום קוטבי המערכת בחוג סגור כתוצאה משינוי ההגבר בחוג פתוח.

לפי מיקום הקטבים ניתן לקבוע את ביצועי המערכת – יציבות המערכת בחוג סגור ומידת היציבות כלומר תגובת היתר וזמן ההרגעות(ריסון).

תכונות גיאומטריות של R.L – כללי עזר לבניה

כלל 1

מספר ענפי ה-R.L שווה למספר הקטבים של פונקצית התמסורת בחוג פתוח GH(s) . ענף מוגדר כמסלול תנועה עבור K=0 עד K=∞.

כלל 2

כל ענף של ה-R.L מתחיל בקוטב של החוג הפתוח (K=0), חלק מהענפים השווה למספר האפסים נגמרים באפסים של החוג הפתוח והשאר נעים לאינסוף.

דוגמא: אם למערכת 6 קטבים ו- 2 אפסים אז 2 ענפים נגמרים ב-2 אפסים ו-4 ענפים ינועו לאינסוף.

כלל 3

קטע ה-R.L על הציר הממשי תלוי במספר כללי של קטבים ואפסים ממשיים הנמצאים מימין לנקודה הנבחנת.

K>0 – R.L על הציר הממשי שוכן לשמאלן של מספר <u>אי זוגי</u> של כלל הקטבים והאפסים הממשיים.

K<0 – R.L על הציר הממשי שוכן לשמאלן של מספר <u>זוגי</u> של כלל הקטבים והאפסים הממשיים.

כלל 4

כיווני האסימפטוטות לאורכו נע ה-R.L

מספר האסימפטוטות שווה למספר הקטבים פחות מספר האפסים $n-l$.

n - מספר הקטבים.

l - מספר האפסים.

K>0 $$\beta=\frac{(2h+1)\cdot 180^\circ}{n-l}$$

K<0 $$\beta=\frac{2h\cdot 180^\circ}{n-l}$$

כאשר $$h=0,1,2......(n-l-1)$$

הערה: הזויות בין כל האסמפיטוטות שוות, לדוגמא אם למערכת 6 קטבים ו-2 אפסים הזוית בין האסימפטוטות שווה ל- $\frac{360}{6-2}=90^\circ$

כלל 5

חיתוך אסמפטוטות עם ציר ממשי- כל האסימפטוטות נתונות בצורת קרניים היוצאות מאותה נקודה על הציר הממשי.

$$\sigma_0 = \frac{\sum \mathrm{Re}(P_i) - \sum \mathrm{Re}(Z_i)}{n-l}$$

σ_0 - נקודת חיתוך עם הציר הממשי.

$\sum \mathrm{Re}(P_i)$ - סכום החלק הממשי של הקטבים.

$\sum \mathrm{Re}(Z_i)$ - סכום החלק הממשי של האפסים.

דוגמא: עבור הפונקציה הבאה:

$$GH = \frac{K}{s(s^2+4s+5)} = \frac{K}{s(s+2+j)(s+2-j)}$$

נקבל:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \mathrm{Re}(Pi) - \sum \mathrm{Re}(Zi)}{n-l} = \frac{(-2)+(-2)+0}{3} = -1.33$$

כלל 6

נקודת בריחה וחדירה של ה-R.L- נקודה על הציר הממשי אשר בה נפרדים או מגיעים 2 או יותר ענפים של המקום הגאומטרי.

$$\sum \frac{1}{(\sigma_b - P_i)} = \sum \frac{1}{(\sigma_b - Z_i)}$$

דוגמא:

עבור הפונקציה: $GH_{(s)} = \frac{k(s+1)}{s(s+30)}$ נציב: $\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b+30} = \frac{1}{\sigma_b+1}$

כלל 7

זווית עזיבה של קוטב מרוכב או הגעה אל אפס מרוכב.

- זווית עזיבה של קוטב מרוכב:

$$\phi_p = 180^\circ + \arg(GH')$$

$\arg(GH')$ - זווית של GH ללא הקוטב המחושב, בהצבה של ערך הקוטב המחושב.

דוגמא:

$$GH_{(s)}=\frac{k(s+2)}{s^2+2s+2}=\frac{k(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

עבור הקוטב: $s=-1+j$

$$\arg(GH')=\arg\left(\frac{-1+j+2}{-1+j+1+j}\right)=\arg\left(\frac{1+j}{2j}\right)=45°-90°=-45°$$
$$\Phi_p=180°+(-45°)=135°$$

- זווית הגעה לאפס מרוכב

$$\phi_z=180°-\arg(GH'')$$

$\arg(GH'')$ - זווית של GH ללא האפס המחושב, בהצבה של ערך האפס המחושב.

<u>כלל 8</u>

חיתוך עם הציר המדומה- כאשר R.L חותך את הציר המדומה המערכת על סף יציבות ולכן נוכל לחשב את Kc (K של המערכת על סף יציבות) לפי ראוט ולפי ערך זה לחשב את נקודות החיתוך.

דוגמא:

עבור הפונקציה : $GH=\frac{K}{s(s^2+4s+5)}$

$$P_{(s)}=s^3+4s^2+5s+k$$

ראוט:

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 5 & 0 \\ s^2 & 4 & k & 0 \\ s^1 & \frac{20-k}{4} & & \\ s^0 & k & & \end{array}$$

$$\frac{20-k}{4}>0\Rightarrow k<20$$
$$k>0$$

מערכת יציבה עבור: $0<k<20$

נקודת חיתוך עם הציר המדומה:

נציב את הערך של k=20 בה יש חיתוך עם הציר המדומה בשורה של המקדם s^2

$$4s^2 + k = 0$$

$$4s^2 + 20 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{-\frac{20}{4}} = \pm j2.236$$